Απειροστικός Λογισμός III 08/11/2016

Είχαμε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{xy} = \gamma = 0$$

αλλά (Άσκηση)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2} = -\frac{1}{2}$$

Βρίσκαμε με Taylor μιας μεταβλητής (ή άλλο τρόπο αν θέλαμε) ότι $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}} f(\bar{x}) = \ell$ (με $\bar{x_0}$ σ.σ. του U) $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x_0}\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x_0}$: $f(\bar{x}_\nu) \to \ell$

$f: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\bar{x_0} \in U \Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U, \bar{x}_\nu \to \bar{x_0}: f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x_0}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to x_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x_0})$ αν $\bar{x_0}$ είναι σ.σ. του U

1η Παρατήρηση: Αν $\bar{x_0}$ μεμονωμένο σημείο στο U, τότε κάθε f είναι συνεχής στο $\bar{x_0}$.

2η Παρατήρηση: Κάθε εσωτερικό σημείο ενός $U \subset \mathbb{R}^n$, είναι σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) γιατί όλα τα σημεία σε ένα ανοικτό U είναι σ.σ.

1. Είδαμε ότι $f(\bar{x}) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής $\forall i = 1, \ldots, n$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού.

3η Παρατήρηση: 2. Εάν $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, είναι συνεχής στο $\bar{x_0} \in U$ και $h: V \to \mathbb{R}$ με $f(U) \subset V \Rightarrow h \circ f: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\bar{x_0}$

Γιατί;

Απάντηση: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x_0} \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x_0}) \xrightarrow{h \text{ συνεχής}}$

$\Rightarrow h(f(\bar{x}_\nu)) \to h(f(\bar{x_0}))$.

Από τα ① και ② (και την άλγεβρα ορίων/συνέχειας) f, g συνεχής στο $\bar{x}_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f+g$, $f \cdot g$, $a \cdot f$ συνεχής στο $\bar{x}_0$).
Έχουμε ότι όλα τα πολυώνυμα είναι συνεχείς συναρτήσεις
f συνεχής στο $\bar{x}_0 \Rightarrow |f|$ συνεχής στο $\bar{x}_0 \Rightarrow \sqrt{|f|}, |x|^{3/2}, |x|^{27/26}$
συνεχής στο $\bar{x}_0$.

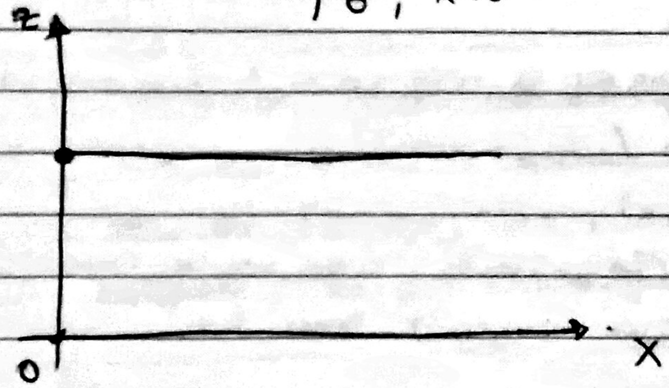
Άσκηση: Έστω ότι:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \text{ με } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

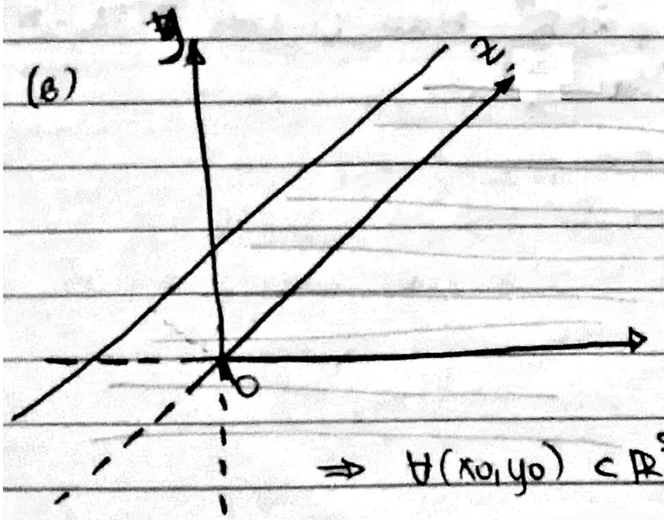
Εξετάστε σε ποιά σημεία $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, η f είναι συνεχής.

(α) Πώς "πάει" αυτή η συνάρτηση;
Έστω $y = y_0$. Τότε:

$$f(x,y_0) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



(β)



Για όλα τα σημεία $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

η f είναι συνεχής ως σταθερή
Πιο συγκεκριμένα $\forall (x_0,y_0) \in a$
$\exists \varepsilon > 0$ $B((x_0,y_0),\varepsilon)$
(εξάλλου το $\tilde{U}$ είναι ανοικτό) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall (x_0,y_0) \subset \mathbb{R}^2$ με $(x_\nu,y_\nu) \to (x_0,y_0) \in \tilde{U}$ $\Rightarrow$

συνέχεια →

* Οι άξονες είναι κλειστά σύνολα !!!

$\to \exists\, \nu_0\ \forall n \geq \nu_0 : (x_\nu, y_\nu) \in B((x_0,y_0), \varepsilon)$, όπου $f(x_\nu, y_\nu) = f(x_0, y_0)$ $\forall \nu \geq \nu_0$ αφού η f είναι σταθερή στο $B((x_0,y_0), \varepsilon)$

(γ) Στα σημεία $\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ η f <u>δεν είναι</u> συνεχής αφού πχ $f(-\frac{1}{\nu}, y) = 0 \to 0 \neq f(0,y)$

Επίσης, $f(\frac{1}{\nu}, 0) = 1 \to 1 \neq 0$
Συνεπώς <u>δεν</u> ισχύει ότι $\forall (x_\nu, y_\nu) \to (0,y) : f(x_\nu, y_\nu) \to f(0,y)$

Παράδειγμα: Εξετάστε τη συνέχεια της f από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) για την οποία ισχύει:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x=0 \text{ ή } y=0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύση: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}}_{=U_1} \cup \underbrace{\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}}_{=U_2}$

η f είναι συνεχής ως σταθερή (το $\mathbb{R}^2 \setminus (U_1 \cup U_2)$ είναι ανοικτό αφού τα U_1, U_2 ($\Rightarrow U_1 \cup U_2$) είναι κλειστά
πχ. αν $(x_\nu, y_\nu) \subset U_1$, $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τότε $(x_0, y_0) \in U_1$.
Πράγματι, $\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{=(0, y_\nu)} \to (x_0, y_0) \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_\nu = 0 \to 0 \\ y_\nu \to y_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
(αφού το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό)
$(x_0, y_0) = (0, y_0) = (0, y_\nu) \in U_1$.
Στα $(x,0) \in U_2$ η f <u>δεν</u> είναι συνεχής αφού:
πχ. $f(x, \frac{1}{\nu}) = 0 \to 0$. Αντίστοιχα, στο $(0,y) \in U_1$ η f δεν είναι συνεχής αφού πχ. $f(\frac{1}{\nu}, y) = 0 \to 0 \neq 1 = f(0,y)$

Παράδειγμα: Σε ποιά σημεία του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεχής η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(Α) $$f_A(x,y) = \begin{cases} |x|, & \text{όταν } y=0 \\ |y|, & \text{όταν } x=0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ χωρίς τους άξονες, είναι μη-συνεχής σε κάθε σημείο πάνω στους άξονες, αλλά είναι συνεχής και στο σημείο $(0,0)$, αφού $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0) \Rightarrow f(x_\nu, y_\nu) \leq \max\{|x_\nu|, |y_\nu|\} \leq$

και $f(x_\nu, y_\nu) \geq 0$ $\qquad \leq \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2} =$

Επομένως, $\qquad = \|(x_\nu, y_\nu)\| \to 0$

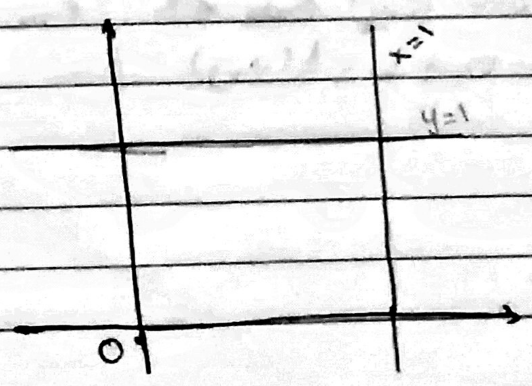
$(x_\nu, y_\nu) \to (0,0) \Longleftrightarrow \|(x_\nu, y_\nu)\| \to 0$

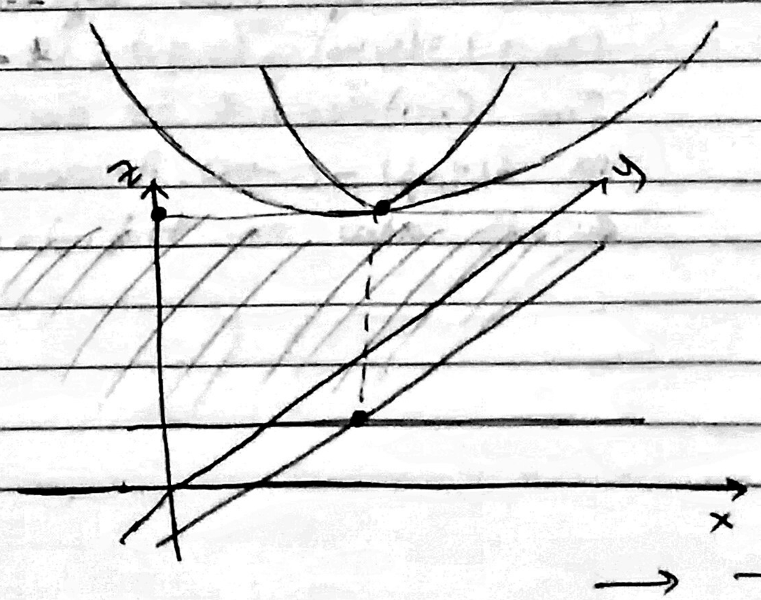
(Β) $$f_B(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } y=0 \\ y^2, & \text{όταν } x=0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$ κάνω τα ίδια με το (Α)

(Γ) $$f_\Gamma(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ασυνέχεια στα σημεία των $\{(x,0) : x \geq 0\}$ και $\{(0,y) : y \geq 0\}$

(Δ) $$f_\Delta(x,y) = \begin{cases} 2+(x-1)^2, & y=1 \\ 2+(y-1)^2, & x=1 \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases}$$



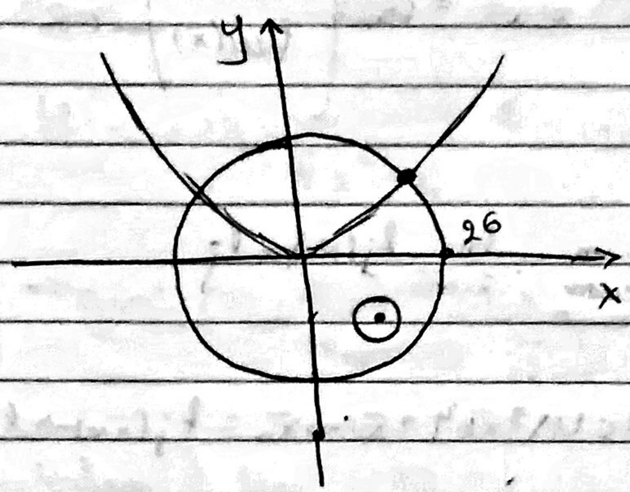


→

⇒ Η f_Δ είναι συνεχής παντού εκτός των ευθειών $y=1$
$(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=1\} = \{(x,1) : x\in\mathbb{R}\})$ και $x=1$

Προσοχή: στο $(1,1)$ η f_Δ είναι επίσης ασυνεχής αφού για
$(x_\nu,y_\nu) = (1+\frac{1}{\nu}, 1+\frac{1}{\nu}) \to (1,1)$ έχουμε
$f(x_\nu,y_\nu) = 1 \xrightarrow{\nu\to\infty} 1 \neq 2 = f(1,1)$

(ε) $f_E(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{για } x^2+y^2=(26)^2 \\ -27, & \text{αλλιώς} \end{cases}$



$|\alpha_\nu - \alpha| \to 0$

Παρατήρηση: (a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $a\in\mathbb{R}$ ⇔ $\forall(a_\nu)\subset\mathbb{R}$, $a_\nu \to a$:
$|f(a_\nu)-f(a)|\to 0$ ⟵ $f(a_\nu)\to f(a)$

(b) $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$ ⇔ $\forall(\bar{x}_\nu)\subset\mathbb{R}^n$, $\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0$ → $\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|\to 0$
$g(\bar{x}_\nu)\to g(\bar{x}_0)$

$|g(\bar{x}_\nu)-g(\bar{x}_0)|\to 0$

(c) $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}^n$
⇔ $\forall(\bar{x}_\nu)\subset\mathbb{R}^n$, $\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0$
$F(\bar{x}_\nu)\to F(\bar{x}_0)\in\mathbb{R}^m$ ⇔ $\|F(\bar{x}_\nu)-F(\bar{x}_0)\|\to 0$

Όρια και συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω $U \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του U, $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$.
Η $\bar{f}$ συγκλίνει στο $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$, όταν το $\bar{x}$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$
$\bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{f}(\bar{x}_0)$

Το όριο $\bar{l}$ της $\bar{f}$ είναι μοναδικό και συμβολίζεται με
$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{l}$

ΒΑ-ΣΙ-ΚΟ-ΤΑ-ΤΗ!

SOS

Παρατήρηση:

Αν $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ είναι $\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$, όπου $f_1(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, …, $f_m(\bar{x}) \in \mathbb{R}$

και $\bar{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

τότε $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{l} \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, m$, $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f_j(\bar{x}) = l_j$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f_j(\bar{x}) = l_j \Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 : f_j(\bar{x}_\nu) \to l_j$

($\Rightarrow$) Η ισοδυναμία προκύπτει από το ότι

$$\bar{f}(\bar{x}_\nu) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_\nu) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}_\nu) \end{pmatrix} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} = \bar{l} \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, m : f_j(\bar{x}_\nu) \to l_j$$

Βρείτε το όριο (αν υπάρχει) $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \underbrace{\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}}_{= f(x,y,z)}$

Ας δοκιμάσουμε μία πολύ απλή ακολουθία πχ. $f(\frac{1}{\nu}, 0, 0) = 0 \Rightarrow$ Άρα το υποψήφιο όριο είναι το 0
Μπορεί να αποδείξουμε ότι $\underline{\underline{\forall}} (x_\nu, y_\nu, z_\nu) \to (0,0,0)$
$f(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \to \infty$.

Παράδειγμα (Δεν αρκεί να εξετάσω μία ή περισσότερες ακολουθίες)

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2,y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ \exists;$$

$f(\frac{1}{\nu},0) = 0 \Rightarrow$ μένει να εξετάσω αν $\forall (x_\nu,y_\nu) \to (0,0)$ ισχύει $f(x_\nu,y_\nu) \to 0$

$$f\left(\frac{1}{\nu^2},\frac{1}{\nu^2}\right) = \frac{1}{\nu^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\frac{1}{\nu^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\nu^2} \to 0$$

Μήπως $f(x_\nu,y_\nu) \to 0 \quad \forall (x_\nu,y_\nu) \to (0,0)$?

$$|f(x_\nu,y_\nu)| = \frac{|x_\nu|\cdot|y_\nu|}{\sqrt{x_\nu^2+y_\nu^2}} \leq \frac{\left(\sqrt{x_\nu^2+y_\nu^2}\right)^2}{\sqrt{x_\nu^2+y_\nu^2}} = \sqrt{x_\nu^2+y_\nu^2} = \|(x_\nu,y_\nu)\| \to 0$$

$\Rightarrow$ πράγματι, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Παράδειγμα $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ Θέτω $g(x,y) = x^2+y^2$.

$g(\frac{1}{\nu},0) = 0 \to 0 \to$ υποψήφιο όριο της g στο $(0,0)$ είναι το 0

όμως, $g(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}) = \dfrac{\frac{1}{\nu^2}}{2\cdot\frac{1}{\nu^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

<u>Ορισμός</u>: $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U, \ \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0, \ f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$

Παράδειγμα: Η ταυτοτική απεικόνιση $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής αφού (α' τρόπος) $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{f}(\bar{x}_0)$

δλδ οι συνιστώσες συναρτήσεις (β' τρόπος) $\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

της f είναι οι προβολές

$f_i(\bar{x}) = x_i$, οι οποίες είναι συνεχείς.

Άσκηση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ένας πίνακας. Δείξτε ότι η $f(\bar{x}) = A\bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής.
(Προσπαθήστε να εκφράσετε την $\|\bar{f}(\bar{x})\|^2$.

Θεώρημα: $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής $\Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{f}(U)$ συμπαγής

Απόδειξη: Έστω $(\bar{y}_\nu) \subset \bar{f}(U) \Rightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{f}(\bar{x}_\nu) = \bar{y}_\nu \ \forall \nu$

$\underset{U \text{ συμπαγής}}{\Rightarrow} \exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ και $\bar{x}_0 \in U : \bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}_0$

$\underset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} \underbrace{\bar{f}(\bar{x}_{k_\nu})}_{= \bar{y}_{k_\nu}} \to \underbrace{\bar{f}(\bar{x}_0)}_{= \bar{y}_0} \in \bar{f}(U)$, δλδ $\forall (\bar{y}_\nu) \subset \bar{f}(U)$
$\exists (\bar{y}_{k_\nu})$ και $\bar{y}_0 \in \bar{f}(U)$
με $\bar{f}(y_{k_\nu}) \to \bar{y}_0$
δηλαδή $\bar{f}(U)$ συμπαγές.

Ειδικότερα $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ η f λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο τα
$\max f = \max f(U) = \max \{ f(\bar{x}), \bar{x} \in U \}$
$\min f = \min f(U) = \min \{ f(\bar{x}), \bar{x} \in U \}$.
δλδ $\exists \bar{x}_m, \bar{x}_M \in U : \min f = f(\bar{x}_m) \le f(\bar{x}) \le f(\bar{x}_M) = \max f \ \ \forall \bar{x} \in U$

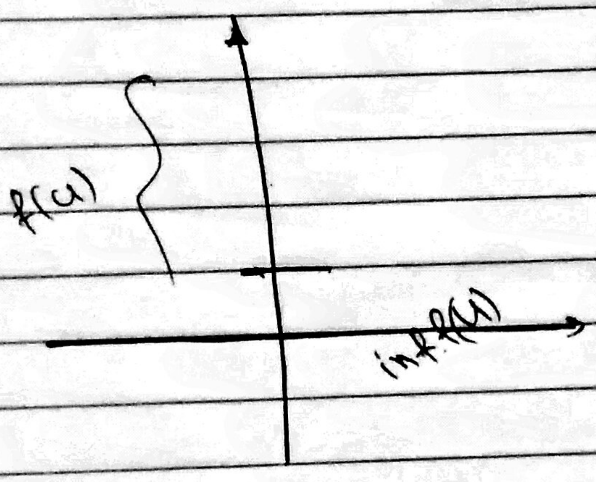
Απόδειξη

Απόδειξη

Αφού το $f(U) \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγές και φραγμένο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \inf f = \inf f(U) = \inf(\{f(\bar{x}), \bar{x} \in U\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \exists (\bar{x}_\nu) \subset U, \ f(\bar{x}_\nu) \in [\inf f, \inf f + \frac{1}{\nu}) \Rightarrow$



$\Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to \inf f \underset{\substack{f(U) \\ \text{κλειστό}}}{=\!=\!=} \inf f \in f(U)$

δηλαδή $\inf f = \min f$

δηλαδή $\exists \bar{x}_m \in U : f(\bar{x}_m) = \min f$.